Enrico Tombelli
ITC "A. Volta" - Bagno a Ripoli - Firenze
(e.tombelli@libero.it)

SISTEMI LINEARI

SISTEMI LINEARI

- GENERALITA’

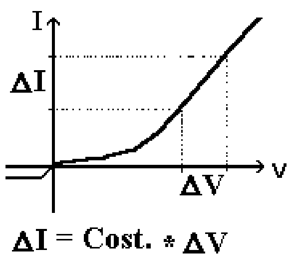
Un SISTEMA è un'entità che sottoposta a certe sollecitazioni (CAUSE) reagisce producendo degli EFFETTI osservabili.

Il fenomeno può essere studiato definendo le GRANDEZZE che vi partecipano e osservando la loro evoluzione nel tempo. Per questo, tali grandezze, costituiscono dei SEGNALI. I segnali, in relazione al sistema si dividono in INDIPENDENTI (ovvero quelli di ingresso che caratterizzano anche le CAUSE) e DIPENDENTI, ovvero quelli che si evolvono in conseguenza degli altri (USCITE corrispondenti agli EFFETTI).

La relazione matematica più o meno approssimata che lega i due tipi di segnali (o grandezze) è detta MODELLO MATEMATICO (Es. Una molla di costante elastica ‘K’ e sottoposta ad una forza ‘F’, (CAUSA/INGRESSO) reagisce producendo un allungamento ‘X’ (EFFETTO/USCITA) proporzionale alla forza applicata. Il modello matematico è $X=K \cdot F$. La scelta del modello dipende dal grado di approssimazione con la quale si deve studiare il sistema. Infatti è possibile scegliere vari livelli di complessità del modello corrispondenti ognuno a simulazioni più o meno precise.

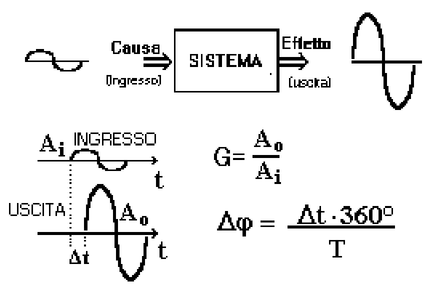
Un sistema è LINEARE quando vale il PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI[1]. Nei sistemi più semplici, come quelli con un ingresso e una uscita, la linearità è identificata da una legge di proporzionalità fra causa ed effetto (es. USCITA= COSTANTE*INGRESSO).

NB: qualsiasi sistema può essere considerato sia lineare sia non secondo il modello matematico prescelto. Infatti il modello scelto per la molla esemplificata sopra è lineare, in quanto l’allungamento si modifica in proporzione alla forza applicata. Però, se si applica una forza spropositata rispetto alle caratteristiche della molla, l’effetto è quello della rottura, oppure, in altri casi si può avere saturazione. Il modello lineare non è più valido. D’altra parte, anche un sistema considerato tipicamente NON lineare può essere studiato in alcuni casi tramite la teoria dei sistemi lineari. Tale eventualità si può avere quando gli ingressi sono “PICCOLI” rispetto alla reazione del sistema stesso. P.e. Una rete che contiene un diodo è non lineare, ma se consideriamo piccoli incrementi di tensione (INGRESSO: ΔV) intorno ad un punto di lavoro nella caratteristica diretta, allora le relative variazioni di corrente (USCITA: ΔI) sono proporzionali alle variazioni di tensione e pertanto può essere utilizzato un modello matematico lineare nell’intorno del punto di lavoro.



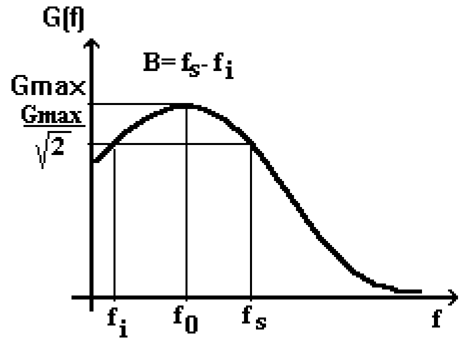
- RISPOSTA IN FREQUENZA

Un sistema lineare, sollecitato da un segnale SINUSOIDALE reagisce producendo un segnale sinusoidale in uscita della stessa frequenza; niente si può dire sull’ampiezza e sulla fase.



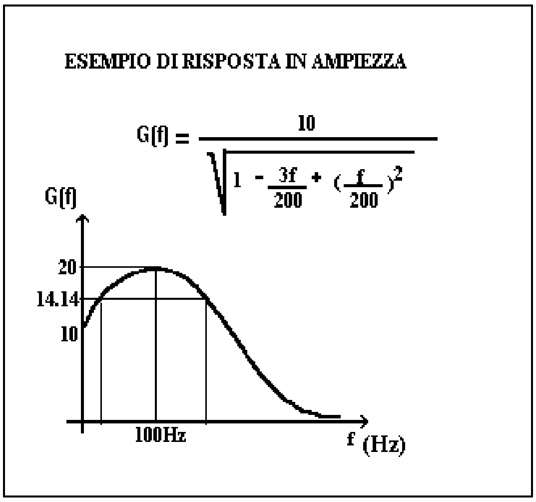
[1]Se vale il PSE, ad una combinazione lineare di ingressi (somma pesata di ingressi) corrisponde in uscita la combinazione lineare delle relative uscite con gli stessi coefficienti. (A1*I1+A2*I2 => A1*O1+A2*O2)

Si deve tenere conto che raddoppiando l'ampiezza del segnale sinusoidale in ingresso, si raddoppia anche quella del segnale di uscita in quanto esiste proporzionalità fra le due ampiezze. La costante di proporzionalità, che dipende dalla frequenza è detta GUADAGNO del sistema lineare. In pratica il GUADAGNO ($G_{(f)}$) è il rapporto fra L'ampiezza del segnale di USCITA e quella del segnale di ingresso. Si può notare che può esistere un certo ritardo fra il segnale di ingresso e quello di uscita dovuto agli elementi inerziali contenuti nel sistema. Si avrà pertanto sfasamento fra i due segnali ($\Delta\varphi_{(f)}$) che si presuppone costante nel tempo, ma dipendente dalla frequenza. Per conoscere quindi il comportamento del sistema a tutte le frequenze è necessario disporre di due diagrammi (uno per il guadagno e uno per la fase) che riportino l'andamento dei due parametri in funzione della frequenza. Tali grafici formano la RISPOSTA IN FREQUENZA del sistema lineare.



Un sistema lineare si può studiare presupponendo che l'ingresso sia sempre di tipo sinusoidale, dato che qualunque segnale (anche non periodico) si può pensare costituito da più componenti sinusoidali di frequenza Multipla (Teorema di FOURIER). Valendo il PSE le singole componenti in ingresso produrranno altrettante componenti sinusoidali in uscita, che sommate insieme ricomporranno il segnale corrispondente a quello in ingresso originario.

> ⇒ Il GUADAGNO [G(f)] di un sistema lineare è il rapporto fra l'ampiezza del segnale di uscita e quella di ingresso corrispondente. (G>1: Amplificazione; G<1: Attenuazione)
>
> ⇒ Lo SFASAMENTO [$\Delta\varphi$(f)] prodotto da un sistema lineare è la differenza di fase fra il segnale di uscita e quello di ingresso.



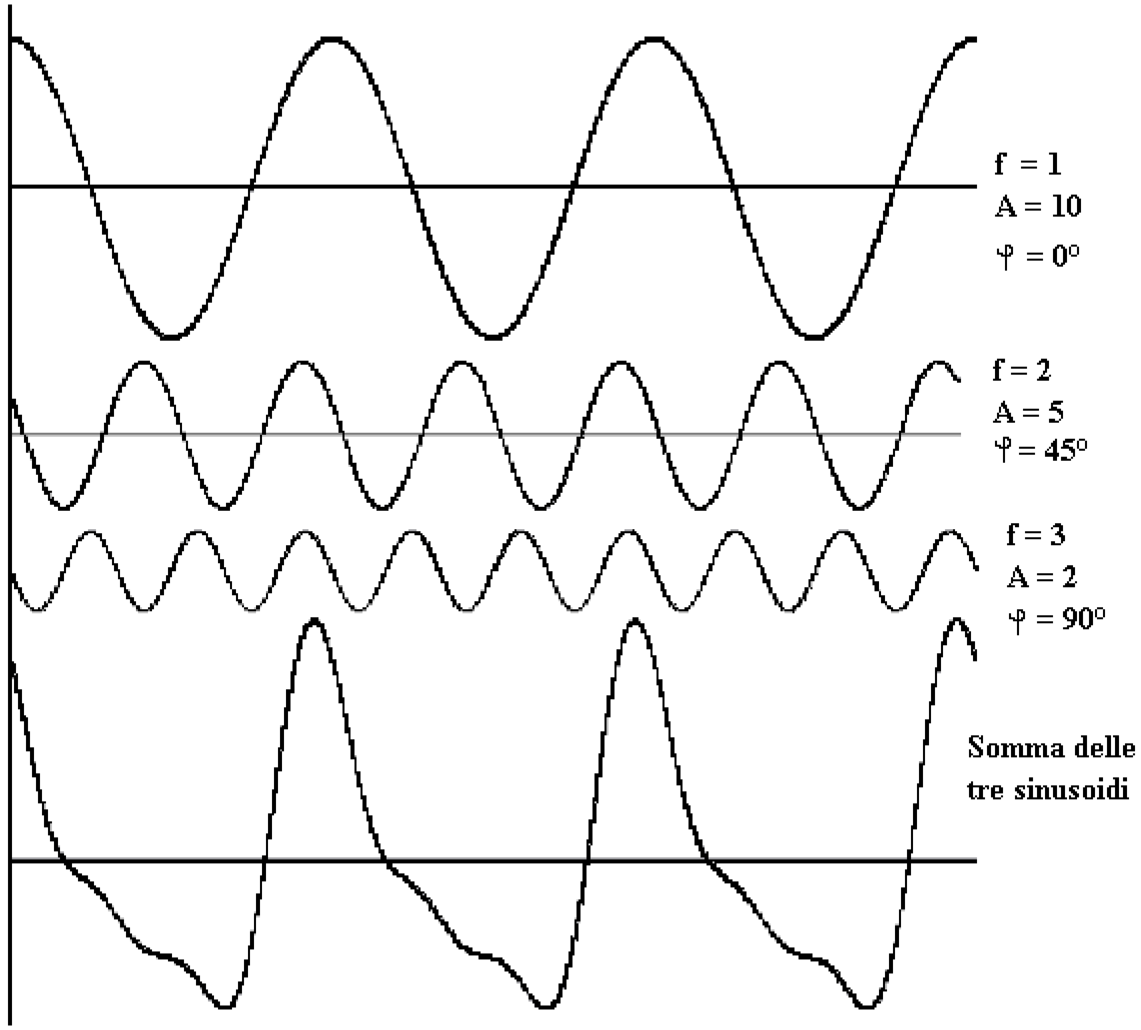
Di norma l'andamento del guadagno in funzione della frequenza è inizialmente crescente, per poi ridursi dopo aver superato un massimo (CENTRO BANDA). Nell'intorno del massimo si ha il funzionamento ordinario del sistema, mentre all'esterno di tale zona la riproduzione del segnale diminuisce sensibilmente fino a ridursi a zero alle alte frequenze. La zona di funzionamento è detta BANDA PASSANTE (B) e viene delimitata da due frequenze dette FREQUENZE DI TAGLIO (Inferiore f_i e superiore f_s). Tali frequenze sono quelle relative ad un guadagno pari a 0.707 Gmax ($G\max/\sqrt{2}$).

- SERIE DI FOURIER

Sommando più segnali sinusoidali è possibile costruire segnali periodici. Infatti se le sinusoidi hanno frequenza multipla (p.e. 100 Hz, 200 Hz, 300 Hz ecc.) la loro somma produce un segnale periodico di frequenza pari a quella della sinusoide a frequenza minore (nell'esempio 100 Hz). Le varie sinusoidi che compongono il segnale "somma" sono dette "ARMONICHE" e quella di frequenza più bassa, ovvero quella che ha la stessa frequenza del segnale risultante è detta "ARMONICA FONDAMENTALE".

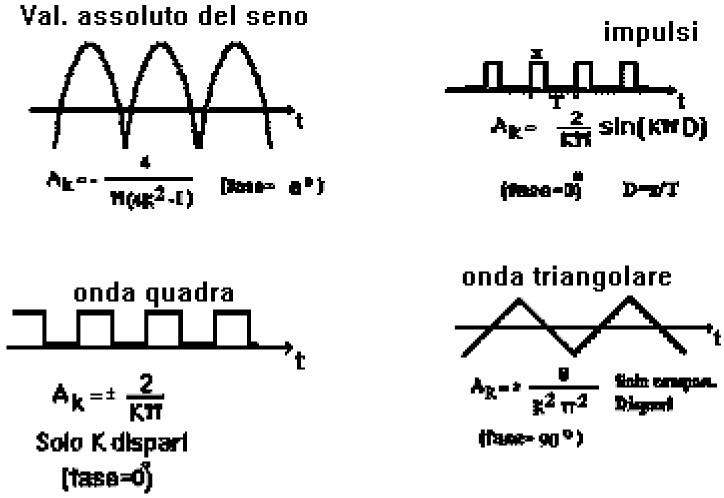
$$S(t)=\sum_{K=0}^{n} A_K \cos(2\pi Kft+\phi_k)$$

La frequenza dell'armonica fondamentale (f_0) e delle successive armoniche ($2f_0$, $3f_0$, $4f_0$, $5f_0$ ....) influisce solo sulla frequenza del segnale risultante. Questo perché la forma d'onda e l'ampiezza dipende invece dall'ampiezza e dalla fase di ogni singola armonica. Variando anche la sola fase o la sola ampiezza di un'armonica si ottengono segnali periodici diversi.



Se componendo più sinusoidi di frequenza multipla è possibile costruire un segnale periodico, vale anche l'inverso cioè, un segnale periodico è possibile pensarlo costituito da una somma di armoniche di frequenza multipla. Per questo ci viene in aiuto il teorema di Fourier:

Enunciato del teorema di Fourier: Sotto certe ipotesi di continuità è possibile costruire un segnale periodico tramite la somma di infiniti segnali sinusoidali di frequenza multipla.

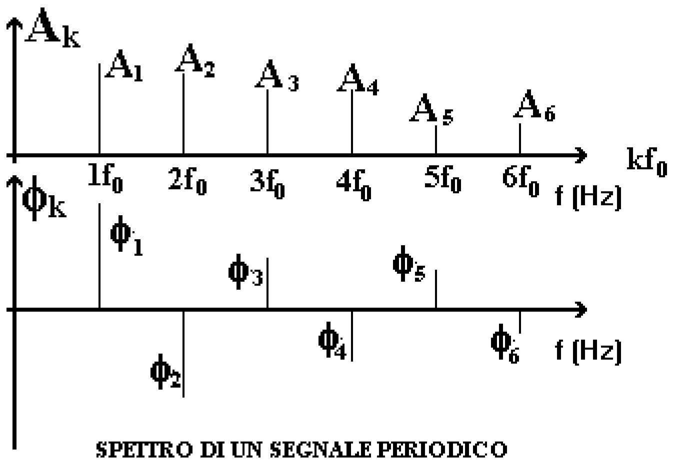


Il problema è trovare i valori delle ampiezze ($\mathbf{A_k}$) e delle fasi (ϕ_k) relative ad ogni singola sinusoide.

Il teorema di Fourier permette anche il calcolo delle varie armoniche componenti, infatti a partire dalla forma d'onda del segnale sinusoidale, operando tramite il calcolo integrale è possibile calcolare l'ampiezza ($\mathbf{A_k}$) e la fase (ϕ_k) di ogni singola armonica (k-ma).

In figura sono rappresentate le espressioni dei coefficienti ($\mathbf{A_k}$ e ϕ_k) delle armoniche relative ai segnali periodici più comuni.

Il teorema di Fourier ci permette anche stabilire, sotto certi criteri, che la relazione che lega un segnale periodico alle sue componenti armoniche è univoco. Questo vuole dire che è possibile rappresentare un segnale periodico anche utilizzando le $\mathbf{A_k}$ e ϕ_k, cioè attraverso le sue componenti armoniche in fase e ampiezza. L'insieme delle ampiezze ($\mathbf{A_k}$) è detto "SPETTRO DI AMPIEZZA", mentre quello delle (ϕ_k) è detto "SPETTRO DI FASE".



SPETTRO DI UN SEGNALE PERIODICO

E' possibile graficare l'andamento delle ampiezze e fasi delle armoniche componenti, ottenendo così quelle che vengono dette "RIGHE SPETTRALI" di un segnale periodico.

Esiste quindi un'alternativa allo studio del segnale in funzione del tempo (DOMINIO DEL TEMPO), ovvero quello nel DOMINIO DELLA FREQUENZA cioè attraverso le sue componenti armoniche.

Sicuramente, la rappresentazione nel dominio della frequenza di un segnale periodico e utile per capire come esso verrà modificato in uscita quando viene posto in ingresso ad un sistema lineare. Infatti, ogni componente può essere studiata singolarmente per poi ricomporre il segnale utilizzando le singole risposte sinusoidali a quelle di ingresso. Tale analisi può essere fatta solamente nei sistemi lineari in quanto vale il PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI.

- SPETTRO DI UN SEGNALE APERIODICO

La frequenza f_0 della prima armonica è anche la frequenza del segnale periodico, nonché la distanza frequenziale fra un'armonica e l'altra. Per questo, se il periodo $T=1/f_0$ del segnale periodico si allunga, la frequenza f_0 si riduce e le righe spettrali si avvicinano. Al limite, al tendere di "T" all'infinito, ovvero per un segnale aperiodico, le righe diventano quasi coincidenti, formando un grafico continuo. Le $\mathbf{A_k}$ e ϕ_k diventano quindi funzioni continue della frequenza [$\mathbf{A_{(f)}}$ e $\phi_{(f)}$].

ESEMPI ED ESERCIZI (Sistemi Lineari)

- ESERCIZIO N. 1

Con riferimento al grafico di figura 1, un sistema lineare presenta una risposta in ampiezza che cresce linearmente a partire da f=0 (G=10) fino ad arrivare a f =5000 Hz con un guadagno G=50. Viene posto in ingresso un segnale sinusoidale di frequenza f=2500 Hz e di ampiezza 20 mV. Dire come si evolve il segnale di uscita e la sua ampiezza.

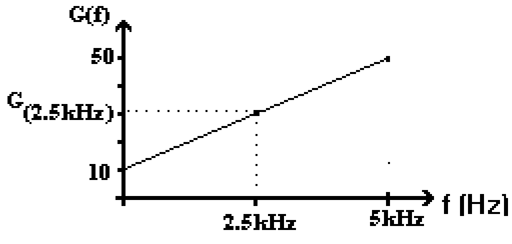


FIG. 1

- ESERCIZIO N. 2

In ingresso al sistema rappresentato dal grafico di figura 1, viene posto un segnale periodico composto da tre armoniche:

armonica:	frequenza (Hz)	ampiezza (mV)
FONDAMENTALE	700	50
2° Armonica	1400	30
5° armonica	3500	10

Specificare come è fatto il segnale di uscita. (graficarne lo spettro)

-

ESERCIZIO N. 3

Un sistema lineare ha una risposta in ampiezza come in figura 2. Calcolare la frequenza di taglio superiore f_s.

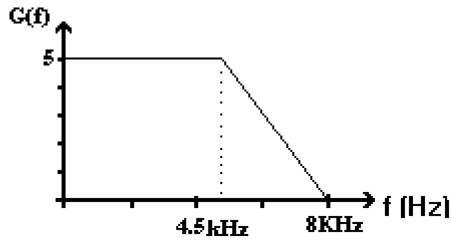


FIG. 2

- ESERCIZIO N. 4

In ingresso al sistema rappresentato dal grafico di figura 2, viene posto un segnale periodico composto da cinque armoniche:

armonica:	Frequenza (Hz)	ampiezza (mV)
FONDAMENTALE	1000	10
3° Armonica	3000	9
5° armonica	5000	5
7° armonica	7000	4
9° armonica	9000	1

Specificare come è fatto il segnale di uscita. (graficarne lo spettro)

- ESERCIZIO N. 5

In ingresso al sistema rappresentato in figura 3 viene posto il segnale di cui all'esercizio precedente.

Specificare come è fatto il segnale di uscita. (graficarne lo spettro)

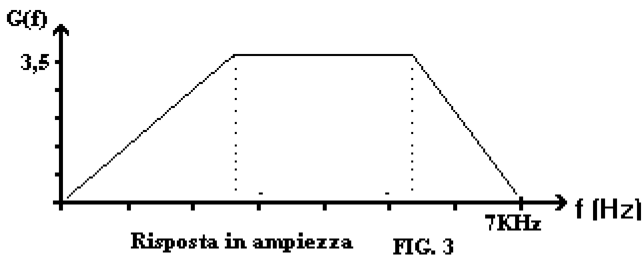


FIG. 3

- ESERCIZIO N. 6

Un sistema la cui risposta in frequenza è data dai grafici (Ampiezza e fase) di figura 4, è sollecitato da un segnale di ingresso il cui spettro è riportato nella tabella seguente:

Specificare l'andamento delle uscite.

armonica:	f (Hz)	A (mV)	ϕ °
FONDAMENTALE	700	10	
3° Armonica	2100	9	
5° armonica	3500	5	
7° armonica	4900	4	
9° armonica	6300	1	

- ESERCIZIO N. 7

Calcolare le frequenze di taglio e la banda passante del sistema rappresentato dalla figura 4.

- ESERCIZIO N. 8

L'andamento della risposta in ampiezza di un sistema è data dalla relazione

$$G(f) = \frac{100}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{5000}\right)^2}}$$

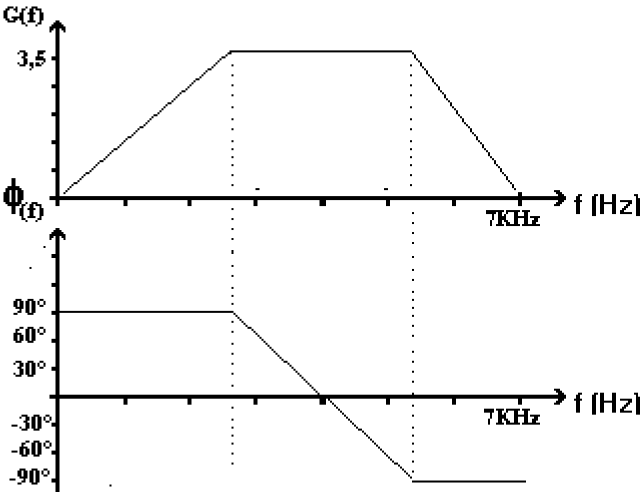


Figura 4

Tracciare il diagramma relativo in funzione della frequenza e calcolare le frequenze di taglio.

Tracciare lo spettro del segnale di uscita con ingresso il segnale già descritto nell'esercizio N. 6.

- ESERCIZIO N. 9

Ripetere l'esercizio N. 8 considerando l'espressione della risposta in ampiezza riportata sotto (f_0=100 Hz e G_{max}= 20)[2].

$$G(f) = \frac{10}{\sqrt{1-\frac{3f}{200}+3\left(\frac{f}{200}\right)^2}}$$

NB: per trovare le frequenze di taglio è necessario conoscere il valore max del guadagno, pertanto si deve calcolare la derivata ed uguagliarla a zero (Gmax = 20 e f_0 = 100 Hz)

- ESERCIZIO N. 10

Tracciare il diagramma dello spettro di un'onda quadra di ampiezza 0,5 V e periodo 5 msec.
Applicare tale segnale al sistema dell'esercizio N. 8 e diagrammare lo spettro del segnale di uscita.

[2] Se $G(f) = \frac{G_0}{\sqrt{1-Af+Bf^2}}$ Allora il massimo di $G(f)$ corrisponde al minimo di $1-Af+Bf^2$. Derivando questa ultima espressione ed uguagliando a zero si ottiene: $f_0 = \frac{A}{2B}$ e $G(f_0) = G_{MAX} = \frac{G_0}{\sqrt{1-\frac{A^2}{4B}}}$. Posto A=3/200, B=2/200^2, G_0 =10 si ottiene: f_0=100Hz e G_{max}=20

NB: se A^2>4B (G_{max} è un numero complesso) non si ha risonanza e non esiste un massimo. Può essere il caso di un dispositivo oscillante dove l'attrito risulta preponderante.

ESERCITAZIONE: TEOREMA DI FOURIER E SEGNALI PERIODICI

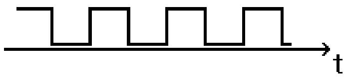
Enunciato del teorema di Fourier: Sotto opportune ipotesi di continuità è possibile costruire un segnale periodico tramite la somma di infiniti segnali sinusolidali di frequenza multipla. Il problema è trovare i valori delle ampiezze ($\mathbf{A_k}$) e delle fasi (ϕ_k) relative ad ogni singola sinusoide.

$$S(t) = \sum_{K=0}^{n} A_K \cos(2\pi Kft + \phi_k)$$

- **SPETTRO.EXE** (Questo programma costruisce un qualsiasi segnale periodico note le sue componenti)

QUADRA.EXE (Per la costruzione della onda quadra tramite le sue componenti)

- **IMPULS.EXE** (costruisce una sequenza di impulsi fissato il DUTY CYCLE -D)



$A_K = \pm \frac{2}{K\pi}$

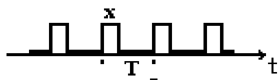
Solo K dispari

(fase=0°)

ONDA QUADRA

1	0.6366385
3	-0.2122128
5	0.1273277
7	-0.09094836
9	0.07073761
11	-0.05787623
13	0.04897219
15	-0.04244256
17	0.03744932

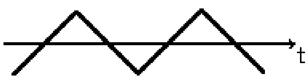
	DUTY CYCLE=0.1	DUTY CYCLE=0.2	DUTY CYCLE=0.7	DUTY CYCLE=0.9
1	0.1967265	0.3741972	0.5150757	0.1967827
2	0.1870986	0.302736	-0.3027269	-0.1871464
3	0.1716803	0.2018301	0.06553808	0.171715
4	0.151368	0.09356122	0.09358511	-0.1513862
5	0.1273277		-0.1273277	0.1273277
6	0.100915	-0.06235825	0.06233436	-0.1008968
7	0.07358224	-0.08649339	0.02814388	0.07354753
8	0.04678061	-0.07568855	-0.07569766	-0.04673284
9	0.02186473	-0.04158807	0.05720364	0.02180858
10				
11	-0.01787913	0.03400926	-0.04684713	-0.01793527
12	-0.03117913	0.05045296	0.05044382	0.03122687
13	-0.03961587	0.04657897	-0.01509394	-0.03965055
14	-0.04324669	0.02673859	-0.02676247	0.04326491
15	-0.04244257		0.04244255	-0.04244254
16	-0.03784427	-0.02337838	-0.02335448	0.037826
17	-0.03030061	-0.03561278	-0.01161177	-0.03026588
18	-0.02079403	-0.03364138	0.03365048	0.02074625
19	-0.01035993	-0.01970463	-0.02708366	-0.01030377



$A_K = \frac{2}{K\pi}\sin(K\pi D)$

(fase=0°) D=x/T

- **TRIANG.EXE** (onda triangolare)



$A_K = \pm \frac{8}{K^2 \pi^2}$ Solo compon. Dispari

(fase= 90°)

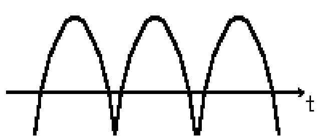
ONDA TRIANGOLARE (FASE fissa a 90 GRADI)

1	0.8106173
3	-0.09006859
5	0.03242469
7	-0.01654321
9	0.01000762
11	-0.006699316
13	0.004796551
15	-0.003602743
17	0.002804003

VALORE ASSOLUTO DEL SENO

1	-0.4244257
2	-0.08488514
3	-0.03637934
4	-0.02021075
5	-0.01286139
6	-0.008904035
7	-0.006529626
8	-0.004993244
9	-0.003942034
10	-0.003191171
11	-0.002636184
12	-0.002214395
13	-0.001886336
14	-0.001626152
15	-0.001416326
16	-0.00124465
17	-0.001102404
18	-0.0009832255

- **UNIDIR.EXE** (costruisce il valore assoluto della funzione seno)



$A_K = -\frac{4}{\pi(4K^2-1)}$ (fase= 0°)

1 Da fare

S.L.

2

S.L.

3

S.L.

4

S.L.

5

S.L.

6

S.L.

7

S.L.

8

S.L.

9

S.L.

10

S.L.

11

S.L.

12

S.L.

13

S.L.

14

S.L.

15

S.L.

16

S.L.

17

S.L.

18

S.L.

19

S.L.

20

S.L.

21

S.L.

22

S.L.

23

S.L.

24

S.L.

25

S.L.

26

S.L.

27

S.L.

28

S.L.

29

S.L.

30

S.L.

31

S.L.

32

S.L.

33

S.L.

34

S.L.

35

S.L.

36

S.L.

37

S.L.

38

S.L.

39

S.L.